28/3/17 Μαθημα 8ο

π.χ. Δινονται οι μεταθέσεις :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Να βρεθουν οι τάξεις τους καθως και των $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$, $\mu\sigma^2$, $\sigma^{-2}\tau$, $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

Λύση

$\sigma = (1,3,4,5,6,2) \Rightarrow o(\sigma) = 6$

$\tau = (1,2,4,3)(5,6) \Rightarrow o(\tau) = \text{ΕΚΠ}(4,2) = 2$

$\mu = (1,5)(3,4) \Rightarrow o(\mu) = 2$.

$\tau\sigma = (1,2,4,3)(5,6)(1,3,4,5,6,2) = (4,6)$

$o(\tau\sigma) = 2$.

$\tau^2 = (1,2,4,3)^2 \cancel{(5,6)^2} = (1,4)(2,3)$

αρα αντιμεταθεση

$\tau^2\sigma = (1,4)(2,3)(1,3,4,5,6,2) = (1,2,4,5,6,3)$

αρα $o(\tau^2\sigma) = 6$.

$\sigma^{-2} = (1,3,4,5,6,2)^4 = (1,6,4)(2,5,3)$

$o(\sigma) = 6 \Leftrightarrow \sigma^6 = 1 \Rightarrow \sigma^6\sigma^{-2} = 1\sigma^{-2} \Rightarrow \sigma^{-4} = \sigma^{-2}$ υψωνω στην 4η

$o(\sigma^{-1}\tau\sigma) = o(\tau) = 4$

συνεχίζεται

παρατηρηση: Αν σ περιττος κυκλος, τοτε σ^2 επισης κυκλος. Ενω αν ειναι αρτιος δεν γνωριζουμε
$\tau = (1,2,4,3) \Rightarrow \tau^2 = (1,4)(2,3)$

Εστω $o(\sigma) = 2k+1$ περιττος κυκλος $\Rightarrow \sigma^2 =$ κυκλος

$$o(\sigma^2) = \frac{o(\sigma)}{(2, o(\sigma))} = \frac{2k+1}{(2, 2k+1)} = 2k+1 \Rightarrow \sigma^2 \text{ κυκλος μηκους } 2k+1$$

Συμπλοκα

$$\mathbb{Z}_n = \{ [0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n \}$$

$[0]_n = \{ nk \mid k \in \mathbb{Z} \} = \underbrace{n\mathbb{Z}}_{\text{υποομαδα}} \leq \mathbb{Z}$

$[i]_n = \{ i + nk \mid k \in \mathbb{Z} \} = i + n\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Z}$ οταν $i \neq 0$.
↳ δεν ειναι υποομαδα

$i + n\mathbb{Z}$ καλειται συμπλοκο.
↳ ειναι το ιδιο με $i+n+n\mathbb{Z}$ δλδ. μπορω να γραψω το $i + n\mathbb{Z} = i + n + n\mathbb{Z} = i - n + n\mathbb{Z}$

γεωμετρικα:

•: το $2\mathbb{Z}$ ειναι οι αρτιοι

■: το $1 + 2\mathbb{Z} = 3 + 2\mathbb{Z}$ ειναι οι περιττοι

Ορισμος:
Εστω G ομαδα, H υποομαδα και $g \in G$.
Το δεξι συμπλοκο της H με το g οριζεται ως $Hg = \{ hg \mid h \in H \}$ και το αριστερο συμπλοκο $gH = \{ gh \mid h \in H \}$

$\left.\begin{array}{l} G = \mathbb{Z} \\ H = n\mathbb{Z} \\ g = i \end{array}\right\}$ απο $i + n\mathbb{Z}$

Προσοχή ! 1) Αν η G όχι αβελιανή δεν ισχύει πάντα $gH = Hg$

2) $gH = H \iff g \in H$

$H = gH = \{gh \mid h \in H\} \ni g$

• Να βρούμε όλα τα σύμπλοκα του $\mathbb{Z}$ στην $\mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$.

Λύση

Παίρνω $r \in \mathbb{R} \Rightarrow r + \mathbb{Z} = (r - [r]) + \mathbb{Z}$

$0 \leq r - [r] < 1$.

Αν $0 \leq \mu \neq \mu' < 1 \Rightarrow \mu + \mathbb{Z} \neq \mu' + \mathbb{Z}$

διαφορετικά σύμπλοκα

αν ήταν ίσα, θα είχαμε $\mu - \mu' \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq \mu, \mu' < 1$ $\Rightarrow \mu = \mu'$ αδύνατο

$\forall r \in \mathbb{R}$ με $0 \leq r < 1$ έχουμε ένα διαφορετικό σύμπλοκο δηλ. έχουμε άπειρα σύμπλοκα.

Πρόταση: Έστω G ομάδα και $H \leq G$.

Ορίζουμε τη σχέση $g \sim_H g'$ ανν $g(g')^{-1}$ ή $g^{-1}g' \in H$

Η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ακριβώς τα σύμπλοκα.

απόδειξη:

1) αυτοπαθής: $g \sim_H g \iff gg^{-1} = 1_G \in H \quad \forall g \in G$

2) συμμετρική: αν $g \sim_H g' \Rightarrow g' \sim_H g$ δηλ. $g(g')^{-1} \in H$

$\Rightarrow (g(g')^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow g'g^{-1} \in H \Rightarrow g' \sim_H g$

3) Μεταβατική: αν $g_1 \sim_H g_2$ και $g_2 \sim_H g_3 \Rightarrow g_1 \sim_H g_3$

$g_1 g_2^{-1} \in H$ και $g_2 g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1 g_2^{-1} g_2 g_3^{-1} \in H \Rightarrow g_1 g_3^{-1} \in H \Rightarrow$

κλασεις ισοδυναμίας $[g] = \{g' \mid g' \in G$ και $g'g^{-1} \in H\}$

$\exists\, h \in H$ με $g'g^{-1} = h \Rightarrow g' = hg$. Δηλαδή το

συμπλοκο Hg ανήκει στην κλαση της $[g] = [g']$.
Αρα $Hg \subseteq [g] = [g']$ και αναποδα $[g] = [g'] = Hg$

Ιδιοτητες: 1) Οι κλασεις ισοδυναμίας είτε ταυτίζονται είτε είναι ξενες μεταξύ τους.
2) Η ενωση ολων των κλασεων ισοδυναμίας θα μας δωσει το αρχικό συνολο.

Πορισμα: Εστω $H \leq G$
α) $Ha = Hb \Leftrightarrow b \in Ha \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ (απο τις ιδιοτητες των κλασεων ισοδυναμίας)
β) $Ha = Hb$ ή $Ha \cap Hb = \emptyset$
γ) Αν $Ha \neq Hb$ τοτε $|Ha| = |Hb|$
δ) Το πλήθος των αριστερών συμπλοκων ισουται με το πληθος των δεξια.

Αποδειξη:
γ) Θα δείξουμε οτι $|Ha| = |H|$ $\forall a \in G$
Ορίζουμε την $\phi: H \to Ha$ με τυπο
$\phi(h) = ha$ ΝΔΟ είναι 1-1 και επι
Αν $ha = h'a \Rightarrow haa^{-1} = h'aa^{-1} \Rightarrow h = h'$
$\forall\, ha \in Ha \Rightarrow \phi(h) = ha$ Αρα $|H| = |Ha|$
Με τον ίδιο τροπο δειχνουμε οτι $|H| = |aH|$

δ) Εστω $A = \{$αριστερα συμπλοκα ως προς H στην $G\}$
$D = \{$δεξια συμπλοκα ως προς H στην $G\}$

Ορίζουμε $\varphi: A \to \mathcal{D}$ $\varphi(Ha) = (Ha)^{-1} = a^{-1}H^{-1} = a^{-1}H$

Θ.δ.ο είναι 1-1.

$\varphi(Ha) = \varphi(Hb) \Leftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H \Leftrightarrow (a^{-1}H)^{-1} = (b^{-1}H)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ha = Hb$

είναι επί αφού $Ha = \varphi(a^{-1}H)$

Ορισμός: Έστω $H \leq G$, ορίζουμε το δείκτη της H στην G, $[G:H]$ να είναι το πλήθος των συμπλόκων.

Πόρισμα: Έστω $|G| < \infty$ και $H \leq G$, τότε ισχύει $|G| = [G:H]\,|H|$

απόδειξη:

G = ξένη ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας - συμπλόκων.

$G = Ha_1 \sqcup Ha_2 \sqcup \ldots \sqcup Ha_k$ με $k = [G:H]$

$|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \ldots + |Ha_k| = [G:H]\,|H|$

Το πόρισμα αυτό είναι το Θεώρημα του Langrauge που λέει:

Θεώρημα Langrauge: Η τάξη κάθε υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας

π.χ.

1) $\mathbb{Z}$, $k\mathbb{Z}$ δείκτης $[\mathbb{Z} : k\mathbb{Z}] = k$

$[\mathbb{Z}] = k\,|k\mathbb{Z}|$

2) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ δείκτης $[\mathbb{R}:\mathbb{Z}] = \infty$ σύμπλοκα

$|\mathbb{R}| = [\mathbb{R}:\mathbb{Z}]\,|\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \infty = \infty \cdot \infty$.

3) $\mathbb{Z}_n$ είναι κυκλικής τάξης n.

Οι υποομάδες του $\mathbb{Z}_n$ είναι όσες είναι οι διαιρέτες του n.

Αν $H \leq \mathbb{Z}_n \Rightarrow |H| \mid n$ και $n = |H| [\mathbb{Z}_n : H]$

$\mathbb{Z}_6$: (διαιρέτες του 6 είναι 1, 2, 3, 6 — τα ακριανά

υποομάδα τάξης 2 : $|Y| = 2$ δηλ. $Y = \langle \frac{6}{2} \cdot 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \{3, 0\}$

$$[\mathbb{Z}_6 : Y] = \frac{|\mathbb{Z}_6|}{|Y|} = \frac{6}{2} = 3$$

Έχουμε 3 σύμπλοκα : $3\mathbb{Z}_6 = Y$

$Ha = H \Leftrightarrow a \in H$ θα πάρω στοιχείο που δεν ανήκει στο Y

$1 + 3\mathbb{Z}_6 = \{4, 1\}$

$2 + 3\mathbb{Z}_6 = \{5, 2\}$

4) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ δεν είναι κυκλική είναι αβελιανή

$H = \langle 1, 1 \rangle$

η τάξη του H είναι : $|H| = o(1,1) = \text{ΕΚΠ}(o(1_2), o(1_4)) = \text{ΕΚΠ}(2, 4) = 4$.

Άρα $H = \langle 1, 1 \rangle = \{(1,1), (0,2), (1,3), (0,0)\}$

Δείκτης : $[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 : Y] = \frac{8}{4} = 2$

έχουμε 2 σύμπλοκα

το προφανές είναι το H, άρα θέλω άλλο 1.

$(1,0) \notin H = \{(0,1), (1,2), (0,3), (1,0)\}$

π.χ.

$S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2 g\}$

$H = \langle f \rangle$. Να βρεθούν όλα τα σύμπλοκα

Λύση

Πρώτα πόσα είναι : $[S_3 : H] = \frac{|S_3|}{|H|} = \frac{6}{o(f)} = \frac{6}{3} = 2$

$H = \{ f, f^2, 1 \}$

$gH = \{ gf, gf^2, g \} = \{ f^2 g, fg, g \}$

αφού $gfg = f^{-1} = f^2$

$gf = f^2 g$

$Y = \langle g \rangle = \langle g, 1 \rangle$ $\quad [\Sigma_3 : Y] = 3$

$fY = \{ fg, f \}$

$f^2 Y = \{ f^2 g, f^2 \}$ $\quad fY = Yf$???

$Yf = \{ gf, f \} = \{ f^2 g, f \}$ δεν είναι ίσα.